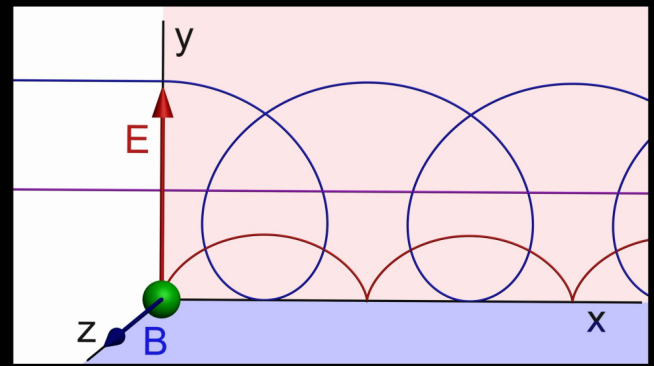
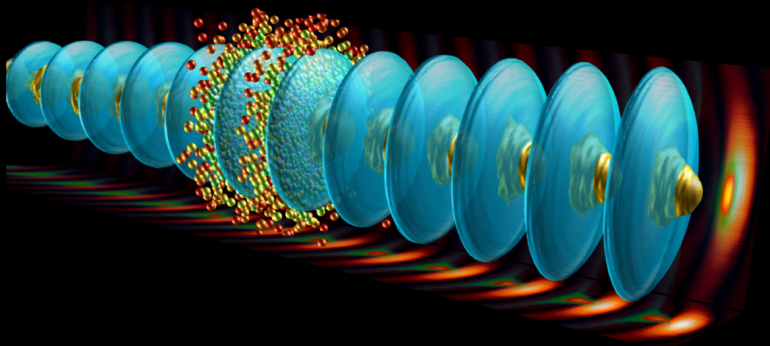




1. La Fuerza de Lorentz

1.1 Objetivos

1.1.1 General

Estudiar la interacción de un campo eléctrico y un campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento

1.1.2 Específicos

- Estudiar la fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve con cierta rapidez dentro de un campo magnético.
- Comprender como surge la fuerza de Lorentz cuando un campo eléctrico y un campo magnético interactúan sobre una partícula cargada en movimiento.
- Recrear la trayectoria de cicloide de una partícula cargada por medio datos construidos a partir de expresiones teóricas.

1.2 Marco Teórico

La fuerza electromagnética es una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, junto con las fuerza gravitacional, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte [3]. Todas estas fuerzas son de acción a distancia. En particular, las fuerzas eléctrica y magnética son fuerzas de acción a distancia sobre partículas cargadas. Sin embargo, cada una de estas tiene una forma de interacción distinta. Por ejemplo, la fuerza eléctrica entre cargas puntuales obedece a la ley de Coulomb, la cual establece que la fuerza eléctrica varía con el inverso al cuadrado de la distancia que separa a dichas cargas. Entre tanto, la fuerza magnética interactúa solamente con partículas cargadas en movimiento [4]. La interacción simultánea de un campo eléctrico y un campo magnético sobre una partícula

cargada en movimiento se conoce como la *fuerza de Lorentz*, en honor al físico holandés y premio Nobel de Física, Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928).

Las aplicaciones de la fuerza de Lorentz son muy variadas, entre las cuales se pueden mencionar principalmente a los aceleradores de partículas circulares. El primero de ellos fue el ciclotrón, inventado por Ernest Lawrence en 1930 [2]. También encontramos los espectrometros de masas, los selectores de velocidad y los magnetrones [4].

1.2.1 Descripción matemática de la fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz se define como la combinación de la fuerza eléctrica y la fuerza magnética sobre una carga puntual en movimiento, cuyas fuerzas son debidas a campos electromagnéticos. Imaginemos una partícula de carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en una región del espacio en el cual existen un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$. Entonces, la fuerza de Lorentz se encuentra descrita por

$$\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]. \quad (1.1)$$

Obsérvese que la fuerza debida al campo magnético está descrita por el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ entre la velocidad $\vec{v}$ y el campo magnético $\vec{B}$. Esto significa, geoméricamente, que la fuerza magnética $\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}$ está dirigida en una dirección perpendicular al plano que forman la velocidad $\vec{v}$ y el campo magnético $\vec{B}$, como se ilustra en la Figura 1.1.

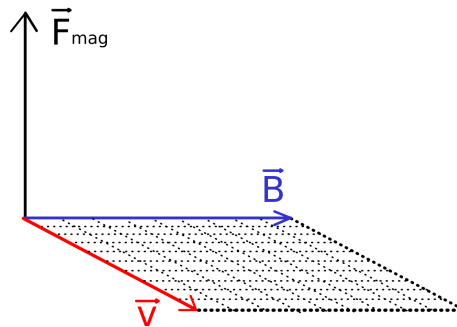


Figure 1.1: Dirección de la fuerza magnética obtenida al realizar el producto vectorial entre la velocidad $\vec{v}$ de la partícula cargada y el campo magnético $\vec{B}$.

Los vectores de campo eléctrico $\vec{E}$ y de campo magnético $\vec{B}$, así como el vector de velocidad $\vec{v}$, en la ecuación (1.1) pueden tener todas las componentes del espacio euclídeo, es decir, componentes en los ejes x , y y z . Esto implica que la fuerza de Lorentz tiene una forma explícita en cada una de las tres direcciones espaciales:

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ F_y &= q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \\ F_z &= q(E_z + v_x B_y - v_y B_x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2.2 Movimiento de cicloide

Manipular las tres ecuaciones dadas en (1.2) para campos eléctricos y magnéticos que tengan componentes en todas las direcciones, resulta una tarea un poco compleja. Por esta razón, es conveniente pensar en campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que sean perpendiculares entre sí, y adicionalmente, que cada uno de ellos esté en la dirección de alguno de los ejes cartesianos. Por ejemplo, que el campo eléctrico $\vec{E}$ apunte en la dirección del eje z , mientras que el campo magnético $\vec{B}$ apunte en la dirección del eje x , como se muestra en la Figura 1.2.

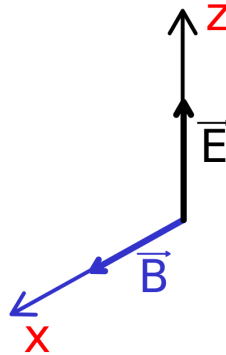


Figure 1.2: Campos eléctrico y magnético, mutuamente perpendiculares.

Con esta elección, la fuerza de Lorentz solo tendrá componentes en el plano $z-y$, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\vec{F} = q[E\hat{z} + Bv_z\hat{y} - Bv_y\hat{z}], \quad (1.3)$$

donde E y B son las magnitudes de los campos eléctrico y magnético, respectivamente, y v_z y v_y son las componentes de las velocidades en las direcciones indicadas por los subíndices. Los vectores $\hat{y}$ y $\hat{z}$ representan a los vectores unitarios a lo largo de los ejes y y z , respectivamente.

Dado que la fuerza de Lorentz en la ecuación 1.3 es la única que existe sobre la partícula cargada en movimiento, entonces la segunda ley de Newton establece que:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q[E\hat{z} + Bv_z\hat{y} - Bv_y\hat{z}] = m\vec{a} \\ &= m[a_y\hat{y} + a_z\hat{z}], \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde m es la masa de la partícula cargada, y $\vec{a}$ es el vector de aceleración de dicha partícula, con componentes solamente en las direcciones y y z . La expresión (1.4) se puede reescribir con ayuda de las derivadas temporales de las coordenadas y y z . Esto es, la velocidad v_y es igual a $\frac{dy}{dt}$, la velocidad v_z es igual a $\frac{dz}{dt}$, la aceleración a_y es igual a $\frac{d^2y}{dt^2}$ y la aceleración a_z es igual a $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Lo anterior constituye un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales y acopladas que describen el movimiento de la partícula cargada, las cuales están dadas por:

$$\begin{aligned} qB \frac{dz}{dt} &= m \frac{d^2y}{dt^2} \\ qE - qB \frac{dy}{dt} &= m \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Los detalles de la solución de este sistema se pueden consultar en [1]. Si la partícula parte del reposo y desde el origen del sistema mostrado en la Figura 1.2, entonces las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales en (1.6) son:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t) \\ z(t) &= \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde ω es conocida como la **frecuencia de ciclotrón** y está definida como:

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (1.7)$$

El movimiento descrito por la curva $z(t)$ vs $y(t)$, de acuerdo con las coordenadas dadas en (1.6), se conoce como *trayectoria de cicloide*. Un ejemplo de esta cicloide se observa en la Figura (1.3), para valores específicos de q , m , E y B .

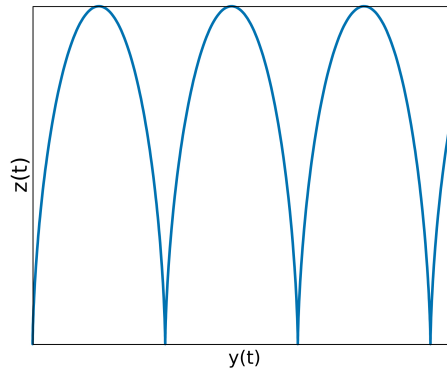


Figure 1.3: Cicloide descrita por una partícula cargada de acuerdo con las expresiones (1.6)

1.3 Actividades Previas al Laboratorio

- Imagine un protón que se mueve con una velocidad descrita por el vector $\vec{v} = (5 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{x} - (8 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{y} - (5 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{z}$, cuando de repente ingresa a una región de campo magnético dado por $\vec{B} = (1.5 \text{ T})\hat{x} + (2 \text{ T})\hat{y} - (0.5 \text{ T})\hat{z}$.
 - Calcule el vector fuerza ($\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$) que experimenta este protón. Para ello puede ayudarse de las expresiones obtenidas en (1.2). **Muestre los detalles de los cálculos.**
 - Calcule la magnitud de la fuerza: $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.
 - Repita los dos puntos anteriores, pero en esta ocasión imagine que es un electrón (Recuerde que la carga de un electrón es negativa).
 - Describa las diferencias que encuentra cuando calcula el vector fuerza para el protón y para el electrón.

1.4 Toma y análisis de Datos

- Imagine un protón que parte del reposo en una región del espacio donde hay un campo eléctrico $\vec{E} = (1 \times 10^{-2} \text{ V/m})\hat{z}$ y un campo magnético $\vec{B} = (2 \times 10^{-8} \text{ T})\hat{x}$.
- En una hoja de cálculo prepare una tabla similar a la Tabla (1.1), y llene la fila de tiempo t con 100 valores, en pasos de 0.1 como se muestra en el ejemplo de la misma tabla.
- Se sugiere calcular ω , el cual es un valor constante para cualquier valor de tiempo, tal y como lo muestra la fórmula (1.7). El propósito de completar la segunda fila de la Tabla (1.1) con este valor constante de ω , es hacer más fácil el cálculo automático de $y(t)$ y $z(t)$ (tercera y cuarta fila de la Tabla (1.1)) con la hoja de cálculo.
- Finalmente, use las expresiones dadas en (1.6) para calcular las coordenadas $y(t)$ y $z(t)$ para cada valor de t en la Tabla (1.1).
- Haga una gráfica de $y(t)$ vs $z(t)$, con los datos de la Tabla (1.1), la cual debe tener una apariencia similar a la de la Figura (1.3).

$t[s]$	0	0.1	0.2		...				9.9
$\omega[rad/s]$									
$y[m]$									
$z[m]$									

Table 1.1: Valores de las coordenadas $y(t)$ y $z(t)$, en función del parámetro de tiempo t .

- Repita el procedimiento anterior (numerales 1 al 5) para un electrón y muestre la trayectoria de cicloide obtenida. ¿Cuál es la diferencia de la cicloide obtenida con respecto a la obtenida para el caso del electrón?
- Recuerde que la rapidez de una partícula se puede calcular como la derivada de la función posición con respecto al tiempo. En nuestro caso, si queremos calcular la rapidez en la dirección y , deberíamos calcular la derivada de la función $y(t)$ obtenida en la ecuación (1.6), es decir:

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}. \quad (1.8)$$

Lo mismo aplica para la rapidez en la dirección z . De acuerdo a lo anterior, calcule la rapidez $v_y(t)$ y $v_z(t)$, usando las expresiones dadas en (1.6).

8. Con el resultado del punto anterior, escriba la velocidad de la carga eléctrica como una función vectorial que depende del tiempo, esto es:

$$\vec{v}(t) = v_y(t)\hat{y} + v_z(t)\hat{z}. \quad (1.9)$$

9. Claramente, la fuerza que experimenta la partícula cargada es siempre perpendicular a la dirección del campo magnético (y a la velocidad), es decir, este vector de fuerza siempre estará en el plano yz . Use la función de velocidad obtenida en el punto anterior, y calcule la **función de fuerza** $\vec{F}(t) = F_y(t)\hat{y} + F_z(t)\hat{z}$ sobre la carga eléctrica con ayuda de la fuerza de Lorentz descrita en las ecuaciones (1.1) ó (1.2).
10. Complete la Tabla (1.2) con los mismos tiempos usados en la Tabla (1.2), y con los valores de las dos componentes de fuerza que da la función de fuerza del punto anterior.

$t[s]$	0	0.1	0.2		...				9.9
$F_y(t)[N]$									
$F_z(t)[N]$									

Table 1.2: Valores de las componentes de fuerza $F_y(t)$ y $F_z(t)$, en función del parámetro de tiempo t .

11. Haga una gráfica de $F_z(t)$ vs $F_y(t)$.
- ¿Qué forma tiene la gráfica?.
 - ¿Cómo interpreta esa forma particular de la fuerza teniendo en cuenta la cicloide obtenida previamente?.
 - ¿Sería posible obtener un círculo? Si esto último es así, ¿cuales deberían ser los valores de q , m , E y B ? Explique detalladamente.

Bibliografía

- [1] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA, 2013. Republished by Cambridge University Press in 2017.
- [2] American Institute of Physics. *Early particle accelerators*, 1999.
- [3] S. Weinberg. *The First Three Minutes: A Modern View Of The Origin Of The Universe*. Basic Books, 1993.
- [4] H.D. Young, A.L. Ford, and R. Freedman. *Sears and Zemansky's University Physics*. Addison Wesley, 2007.